

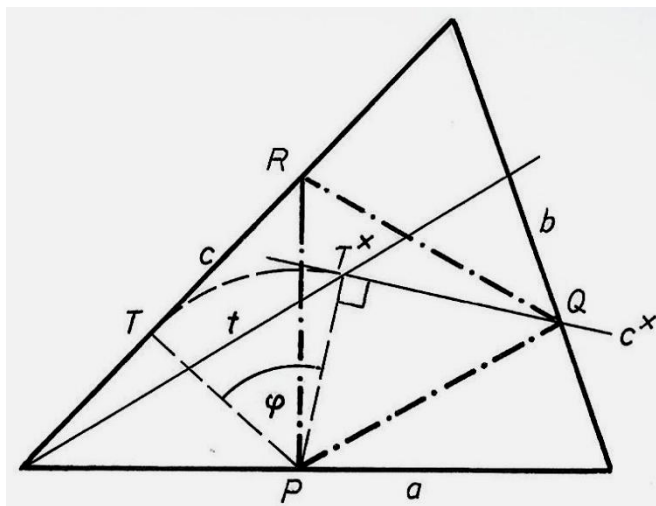
A MINDEN HÁROMSZÖGBE BEÍRHATÓ LEGKISEBB SZABÁLYOS HÁROMSZÖGRŐL

Hajdu Endre

Évtizedek során összegyűlt geometriai följegyzések, feladatok, megoldások átnézése, selejtezése során bukkantam egy régi ötletemre: adott három, nem egy egyenesen lévő pont, szerkesztendő a legnagyobb szabályos háromszög, melynek egy-egy oldala az adott pontok valamelyikét tartalmazza. Ezen a feladaton tűnődve jutottam egy rokon, de minimum-keresést jelentő példára: egy tetszőleges háromszögbe hogyan szerkeszthető legkisebb szabályos háromszög, melynek csúcsai az adott háromszög oldalaihoz illeszkednek. Ellentétben a közismertnek mondható, háromszögbe írható legkisebb területű háromszög feladatával (talpponti háromszög [1]), ez kevésbé ismert, tárgyalt téma, ezért lehet indokolt a vonatkozó irodalomban [2], [3] talált megoldásoktól különböző alábbi szerkesztéseim ismertetése. A két megoldás közül a második annyiban mondható sajátosnak, hogy a minimum-keresés céljából egy maximális méretű háromszöget kell előállítani.

1. Megoldás.

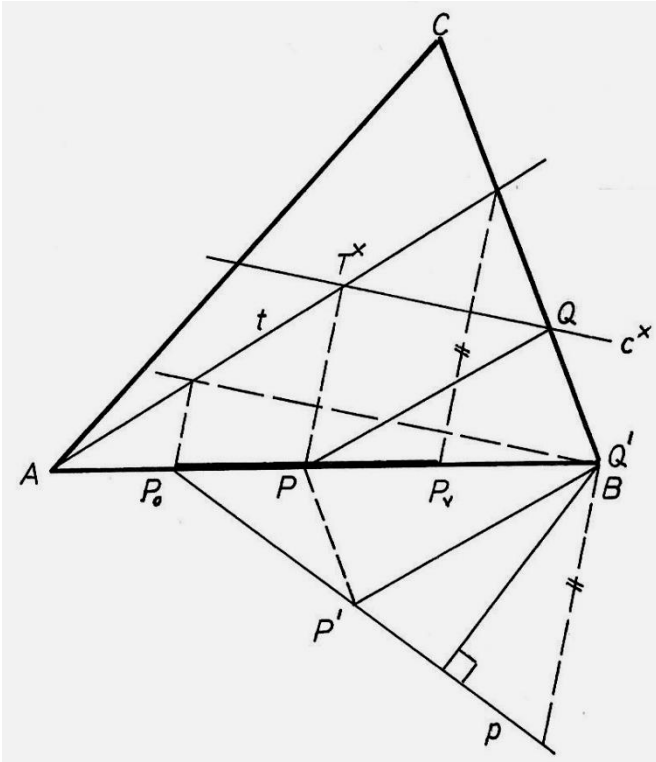
Mint ismeretes, egy adott háromszög valamely a oldalán fölvelt P pontját egy szabályos háromszög egyik csúcsául véve, a b oldalon keresett Q csúcsot, a c oldal egyenesének a P körül $\varphi = 60^\circ$ - kal elforgatottja jelöli ki az 1. ábra szerinti szerkesztés révén.



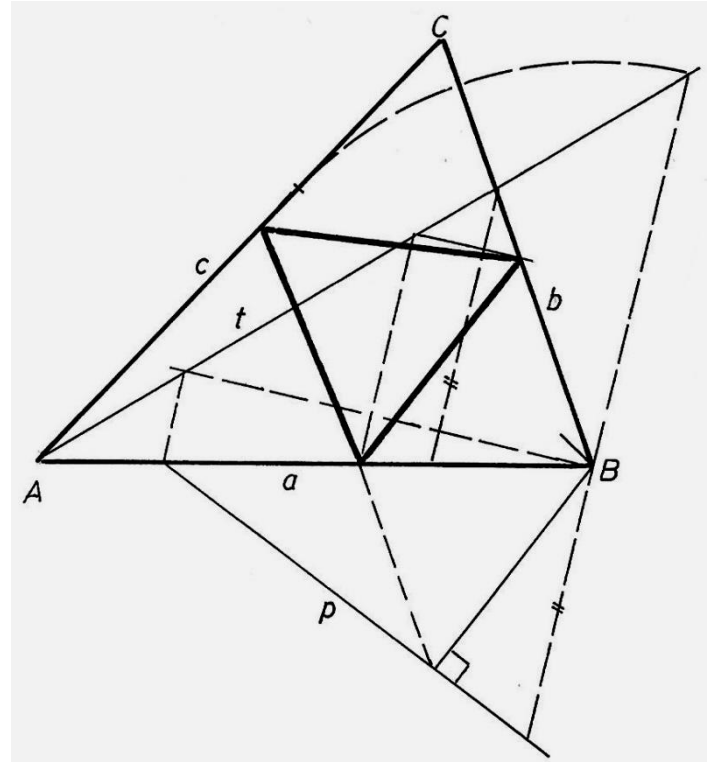
1. ábra

A Q pont ismeretében a PQR szabályos háromszög megszerkesztése már egyszerű. Az a oldalon fölvelt P pont helyzetétől függetlenül, a T talppont T^* elforgatottja ugyanarra a t egyenesre esik, a PT^* - ra merőleges c^* egyenes állása is változatlan. Az eredeti föladat az 1. ábra alapján úgy is átfogalmazható,

hogy keressük a P pont azon helyzetét, melynél a $PT*Q$ derékszögű háromszög átfogója a legkisebb, ha P befutja az a oldalt. A 2. ábrából kitűnik, hogy az a oldalnak csak a P_0P_v darabján jelölhető ki P . A $PQQ'P'$ paralelogrammához tartozó minden P' pont egy egyenesre, a p -re esik. A P_0P_v szakasz minden P helyzetéhez tartozik egy $Q'P'(Q' \equiv B)$ szakasz, s ezek közül a legrövidebb a p -re merőleges szakasz.



2. ábra

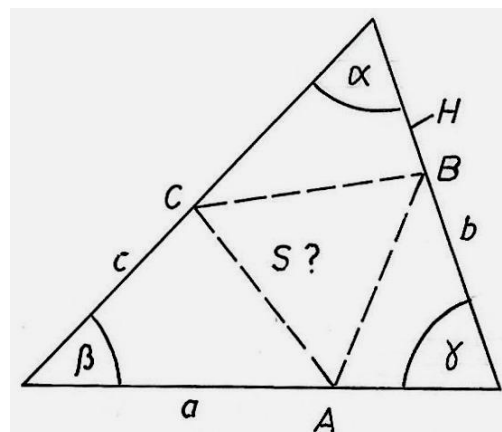


3. ábra

Az eredeti föladat 1. megoldását az imént látottak alapján, a 3. ábra szemlélteti.

2. Megoldás.

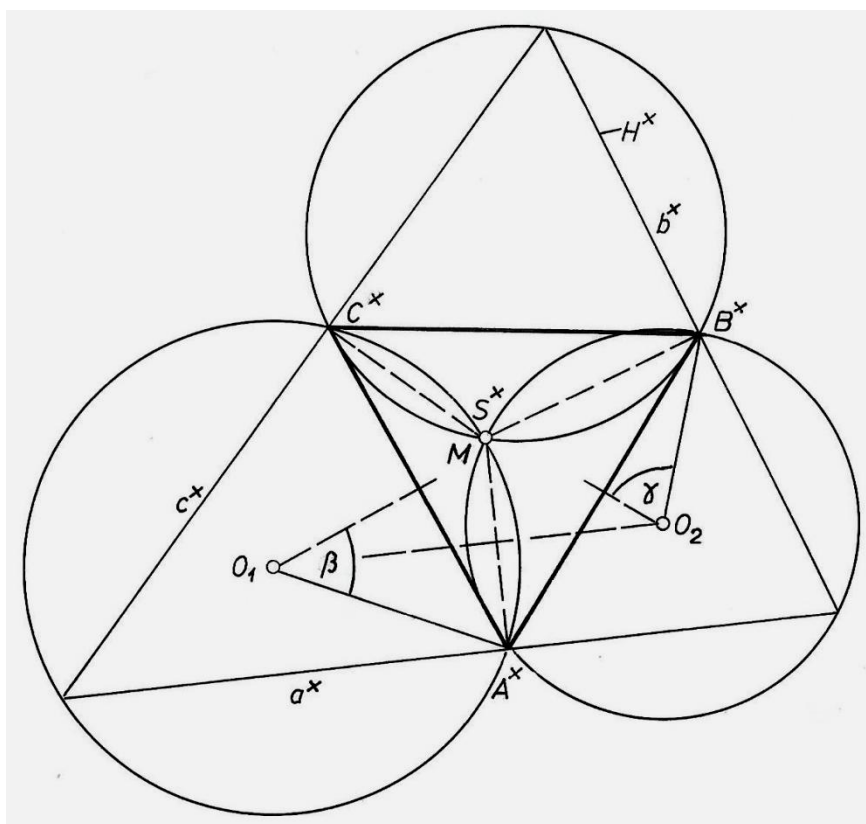
Az előző megoldásban szereplő adott háromszögnek feleljen meg most a 4. ábra H háromszöge, az ismeretlen méretű legkisebb beírt szabályos háromszögnek pedig S .



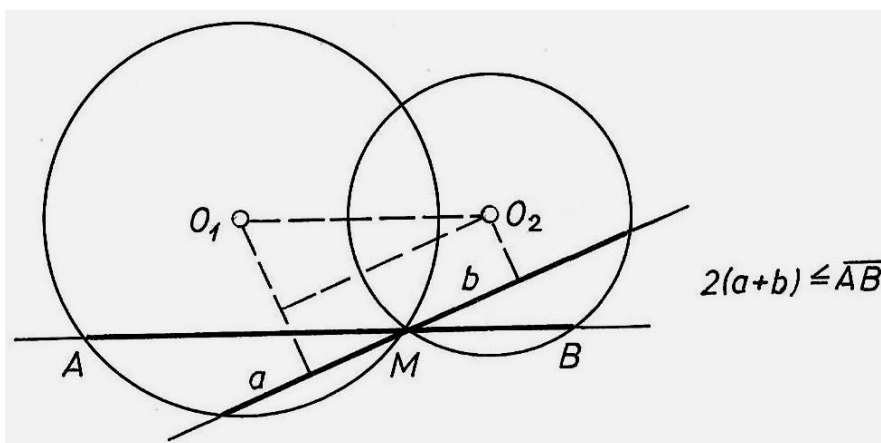
4. ábra

A második megoldás lényege: az S -hez hasonló, tetszőleges méretű szabályos háromszöget veszünk föl, melyre a H háromszöghöz hasonló, de legnagyobb körülírt háromszöget szerkesztünk, majd a kapott háromszöget az adott H méretére kicsinyítjük – vagy nagyítjuk.

Jelölje most a keresett S legkisebb beírt szabályos háromszög tetszőleges méretű megfelelőjét S^* , csúcspontjait $A^*B^*C^*$. Az adott háromszög a oldala a^* megfelelőjének végpontjai az A^*B^* és A^*C^* oldalakra szerkesztett γ ill. β szögű látóöríveken keresendők, azzal a föltétellel, hogy egymástól mért távolságuk a lehető legnagyobb legyen, mert ha a fölvett szabályos háromszög a köré írt háromszög legkisebb szabályos háromszöge, akkor a beírt háromszöghöz képest a köré írt háromszög maximális (5. ábra).



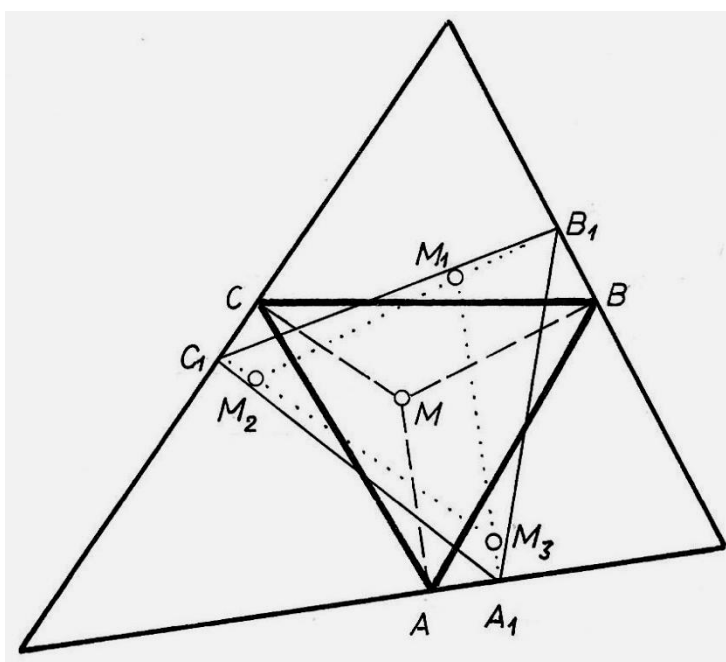
5. ábra



6. ábra

Ez utóbbi részfeladatnak a megoldása a 6. ábrából következik: két egymást metsző kör egyik M metszéspontján átmenő egyenesnek a körök által határolt darabja $2a + 2b$ hosszúságú, ahol $2(a+b)$ akkor a legnagyobb, ha az egyenes párhuzamos a kör-középpontokat összekötő egyenessel. Az 5. ábrán e feltétel alapján szerkesztett a^* egyenes kimetszi a látókörvek megfelelő pontjait, az S^* háromszög köré írt legnagyobb és kívánt alakú háromszögének csúcspontjait.

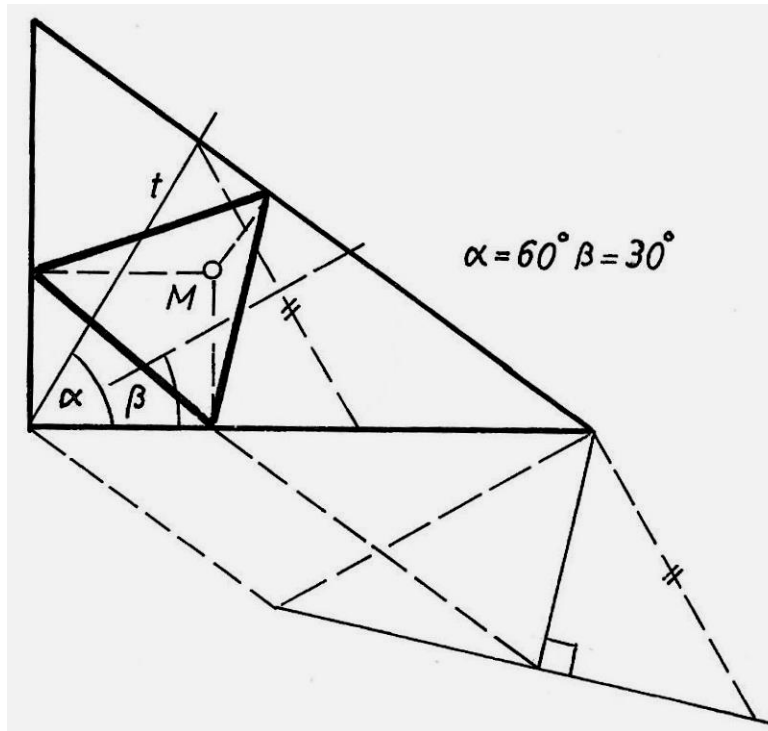
Megemlítenéd, hogy az S^* háromszög oldalaira szerkesztett látókörvek egy M pontban metszik egymást, mely pont egyben az $A^*B^*C^*$ pontokban a H^* oldalaira állított merőlegesek közös pontja is. A keresett H háromszög az 5. ábra olyan kicsinyítésével adódna, melynél a 4. ábrával azonos alakzatot kapnánk. A kicsinyítést mellőzve még egy figyelemre méltó mozgásgeometriai tényre érdemes rámutatni (7. ábra): ha a keresett háromszögon kívül egy másik beírt szabályos háromszöget is megrajzolunk, ami már nagyobb persze, mint a vastagon rajzolt legkisebb, föl-vethető a kérdés: elmozgatható-e a beírt háromszög úgy, hogy két csúcsa a megfelelő támaszoldalon maradjon?



7. ábra

Az új háromszög A_1B_1 csúcsa a körülírt háromszög megfelelő oldalain akkor indulhat mozgásnak, ha a momentán centrum M_1 . Ha a B_1C_1 szakaszt mozgathatnánk, a momentán centrum az M_2 lenne. A C_1A_1 - hez az M_3 tartozna; mi a helyzet a legkisebb beírt háromszöggel? Egyetlen M momentán centrum adódik, mert mint láttuk korábban, a legkisebb beírt háromszög esetén a momentán centrumot kijelölő egyenesek egy pontban metsződnek. Az M pont körül elforgatható a beírt háromszög, csúcsai elhagynák persze a támasz-oldalakat. A Bevezetésben említett feladat, egy adott háromszög köré írt legnagyobb szabályos háromszögnek egy lehetséges szerkesztését, egy derékszögű

háromszög esetén szemlélteti a 8. ábra; az AB , ill. AC oldalhoz tartozó, 60° látószögű körívek középpontjainak összekötő szakaszával párhuzamos és az A pont-hoz illeszkedő egyenes metszi ki a látókörívekből a keresett legnagyobb köré írt szabályos háromszög két végpontját. A maximális méretű köré írt háromszög hasonló, sőt párhuzamosan hasonló a legkisebb beírt háromszöghöz, s mivel e hasonlóság nem eltolás, ezért centrális.



8. ábra

A legnagyobb köré írt háromszög esetén is érvényesek a 7. ábrával kapcsolatban említett tulajdonságok: a csúsponti támasznormálisok egy pontban metszik egymást, az M_b belső és az M_k külső metszéspontok általános esetben nem esnek egybe. E pontok körül a fixnek tekintett ABC háromszöghöz képest a belső háromszög forgatható el M_b körül, míg a köré írt háromszög az M_k körül, az óramutató járásával egyező vagy ellentétes forgásirányban.

Irodalom:

[1] **H. Rademacher ~ O. Toeplitz:** Számokról és alakzatokról
Typotex Bp. 2010.

[2] http://mathafou.free.fr/pbg_en/sol143.html

[3]
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2017_AIME_I_Problems/Problem_15

Sopron, 2021. május + augusztus hó